**Wynn’s rho algorithm**

Итерационный процесс Δ² (см. уравнение (1))

и эпсилон-алгоритм Винна (уравнение (2))

являются мощными инструментами ускорения линейной сходимости последовательностей, а также способны суммировать многие чередующиеся расходящиеся ряды (см., например, Weniger [88, секция 15.2] и строгое доказательство сходимости при суммировании ряда Эйлера в Borghi [13]). Однако оба метода неэффективны при логарифмической сходимости (Wimp [104, Теорема 12]).

Чтобы решить эту проблему, в 1956 году Винн вывел свой rho-алгоритм [Wynn 1956, уравнение (8)]:

Sn  элементы исходной последовательности,

Xn  набор интерполяционных точек, удовлетворяющим условиям:

Как подчеркивает Осадa [61], это является эффективным методом ускорения для многих логарифмически сходящихся последовательностей.

Аналогично эпсилон-алгоритму, только элементы **с четными нижними индексами** приближают предел исходной последовательности. Элементы **с нечетными индексами** служат только как вспомогательные величины и расходятся, если сама трансформация сходится.

Смысл алгоритма можно объяснить как аппроксимацию к знаменателю интерполяционной цепной дроби, в которой используются точки интерполяции {xn}, экстраполируемые к бесконечности (см. Cuyt and Wuytack [37, гл. IV.1.4]).

Поэтому важно, чтобы xn были положительными, строго возрастающими и неограниченными (см. уравнение (4))

На практике почти всегда используется стандартная форма rho-алгоритма, где xn = n + 1, что приводит к:

(см. Weniger [88, уравнение (6.2-4)]).

Однако, как показал Osada [60, Теорема 3.2], эта стандартная форма эффективна для последовательностей, чьи остатки убывают как (n+β)−θ, где параметр затухания — положительное целое число. При нецелых значениях она перестает быть эффективной. Для устранения этого недостатка Осадa предложил обобщение rho-алгоритма, где учитывается известное значение .

Обобщение Осады

Норио Осада предложил модификацию алгоритма для произвольных θ>0:

Этот вариант ускоряет сходимость для модельных последовательностей вида:

обеспечивая асимптотическую оценку:

(см. Osada [60 уравнение (3.1)]). Было доказано, что (см. уравнение (8)) указывает на значительное улучшение сходимости при правильном выборе . [Osada, Теорема 4].

Если же значение заранее неизвестно, его можно аппроксимировать с помощью преобразования, предложенного Драммондом [39, стр. 419] и переоткрытого Бьерстадом и др. [11, уравнение (4.1)]:

и тогда:

Параллельно с этим были предложены и итерационные версии rho-алгоритма — например, аналог итерации Эйткена для rho с неопределенными точками интерполяции (3), или вариант Боумиком и др. [9, уравнение (2.25)], хотя последний оказался менее эффективным.

Также была разработана итерация обобщения Осадa, приведенная в виде рекурсивной схемы в [89, уравнение (2.29)], первоначально предложенная Бьерстадом и др. [11, уравнение (2.4)], где алгоритм получил название модифицированная формула Δ².

Резюмируя, алгоритмы Wynn’s rho, его стандартная и обобщённые формы, такие как вариант Osada, а также их итерации, составляют важнейшие методы ускорения сходимости логарифмических последовательностей, и легли в основу дальнейших разработок, включая алгоритмы, представленные в данной статье.

**Заключение**

Алгоритм ро Винна остается ключевым инструментом в численном анализе благодаря своей способности работать с логарифмически сходящимися последовательностями. Его обобщения, такие как метод Осады, расширяют область применения, делая его универсальным для широкого класса задач.

Литература:

1. Wynn, P. (1956). *On a Procrustean technique for the numerical transformation of slowly convergent sequences and series*.
2. Osada, N. (1990). *A convergence acceleration method for some logarithmically convergent sequences*.
3. Brezinski, C., & Redivo Zaglia, M. (1991). *Extrapolation Methods*.
4. Construction of new generalizations of Wynn’s epsilon and rho algorithm bysolving finite difference equations in the transformation order